

Zur Begründung der Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Von PASCUAL JORDAN¹

(Z. Naturforschg. 3 a, 522—523 [1948]; eingegangen am 24. Mai 1948)

Es wird ein gegenüber der vorhandenen Literatur sehr verkürzter und vereinfachter Beweis gegeben für die grundlegende Tatsache, daß in einer irreduziblen unitären Gruppen-Darstellung n -ten Grades genau n^2 linear unabhängige Matrizen vorkommen.

§ 1. Da die mathematischen Probleme der Physik stets ein Hauptarbeitsgebiet A. Sommerfelds gewesen sind, so mag es erlaubt sein, hier eine kleine Betrachtung vorzutragen, die rein mathematischen Inhalt hat, aber wesentlich für Physiker bestimmt ist. Die Darstellungstheorie der endlichen Gruppen ist von Frobenius, Burnside und Schur seinerzeit aus recht verwickelten Überlegungen hergeleitet worden. Auch in späteren Büchern hat die Erläuterung dieser Theorie eine recht umständliche Gestalt behalten, — soweit sie nicht durch Auslassung entscheidender Beweise gewaltsam abgekürzt wurde. Trotz der hohen Bedeutung, welche diese mathematische Theorie seither für die Quantenmechanik gewonnen hat, ist sie nur sehr wenigen Physikern geläufig geworden.

Im folgenden soll nun ein ganz kurzer und einfacher Beweis vorgetragen werden für folgenden Satz: *Hat eine Gruppe eine irreduzible unitäre Darstellung durch Matrizen n -ten Grades, so sind von diesen Matrizen genau n^2 linear unabhängig.* Dieser Satz — ein Spezialfall eines Satzes von McLagan-Wedderburn² — erlaubt, sobald er bewiesen ist, die Herleitung aller weiteren Ergebnisse der Darstellungstheorie in wenigen Schritten. Auch die von Dirac, Slater u. a. ausgeführten Überlegungen, welche darauf abzielen, die mathematischen Schwierigkeiten der Darstellungstheorie zu *umgehen*, haben ihre Grundlage gerade in diesem Satze, der also den eigentlichen Kerngehalt der quantenmechanischen Anwendungen der Darstellungstheorie umfaßt.

§ 2. Eine Gruppe A, B, C, \dots besitze also eine irreduzible Darstellung durch unitäre Matrizen a, b, c, \dots eines endlichen Grades n . Wir betrachten nun den „Schiefring“ \mathfrak{S} aller derjenigen

Matrizen $x = \xi_1 a + \xi_2 b + \xi_3 c + \dots$, welche daraus durch Multiplikation mit komplexen Zahlen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ und Addition gebildet werden können: Die zu \mathfrak{S} gehörenden Matrizen können also beliebig addiert und multipliziert werden. Ferner enthält \mathfrak{S} zu jedem x auch die Adjungierte $x^\dagger = \xi_1^* a^{-1} + \xi_2^* b^{-1} + \xi_3^* c^{-1} + \dots$, wo ξ^* konjugiert komplex zu ξ ist. Beachte die Rechenregeln $(\xi x + \eta y)^\dagger = \xi^* x^\dagger + \eta^* y^\dagger$; $(xy)^\dagger = y^\dagger x^\dagger$ und $x^{\dagger\dagger} = x$. Ferner hat dieser Schieftring eine endliche Basis, d. h. es gibt in ihm nur endlich viele (höchstens n^2) linear unabhängige Matrizen x . Endlich ist er ein „formal-komplexer“ Schieftring, womit wir (analog zur Artin-Schreyerschen Begriffsbildung „formal reell“) folgenden Sachverhalt meinen. Gilt für gewisse Matrizen die Gleichung $x_1^\dagger x_1 + x_2^\dagger x_2 + x_3^\dagger x_3 + \dots = 0$, so verschwinden sie sämtlich: $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = 0$. Denn für $x \neq 0$ ist die *Spur* $\text{Sp}(x^\dagger x) > 0$.

Wir beweisen nun, daß *jeder* formal-komplexe, irreduzible Schieftring \mathfrak{S} endlicher Basis äquivalent ist mit der Algebra *aller* Matrizen eines gewissen Grades, mit beliebigen komplexen Zahlen als Matricelementen.

§ 3. Satz 1. Es gibt in \mathfrak{S} eine *Haupteinheit* e mit $ex = xe = x$ für alle x . — Diese Behauptung ist trivial, soweit es sich um den in § 2 aus einer Gruppe abgeleiteten Schieftring \mathfrak{S} handelt; wir benötigen den Satz aber für *jeden* formal-komplexen Schieftring endlicher Basis.

Beweis durch Induktion in bezug auf die Maximalzahl N von linear unabhängigen Matrizen in \mathfrak{S} : Es sei $b = b^\dagger \neq 0$; dann ist auch $b^r \neq 0$. Wegen der endlichen Basis besteht eine Gleichung

$$b^r + \lambda_{r-1} b^{r-1} + \dots + \lambda_0 b^0 = h(b) b^0 + \lambda_0 b^0 \quad (1)$$

$$= 0$$

mit $0 < r$ und $\lambda_0 \neq 0$; beim *kleinsten* Werte r , für den eine solche Beziehung gilt, sind λ_{r-1}, \dots

³ Denn wäre $b^r = 0$, aber $b^{r-1} \neq 0$, so wäre, da \mathfrak{S} formal-komplex, im Falle $r = 2s$ auch $b^s = 0$, und im Falle $r = 2s + 1$ auch $b^{s+1} = 0$, was einen Widerspruch ergäbe.

¹ Hamburg 13, Bundesstr. 84.

² „Ein halbeinfacher irreduzibler Schieftring mit Koeffizientenkörper und mit endlicher Basis in bezug auf diesen Koeffizientenkörper ist äquivalent der Algebra aller Matrizen eines gewissen Grades n mit Elementen, die einem gewissen Schiefkörper angehören.“



λ_0 reell. Für $g = -\lambda_0^{-1}h(b)$ wird also $gb^0 = b^0$ und $g^{2^0} = g^0$. Folglich hat $e_1 = g^0 \neq 0$ die Eigenschaften $e_1 = e_1^\dagger = e_1^2$; in Worten: e_1 ist ein hermitesches „Idempotent“ oder eine hermitesche „Einzelmatrix“.

Entweder ist e_1 bereits die gesuchte Haupteinheit, oder die „Peircesche Zerlegung“

$$\begin{aligned} x &= x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} \\ &= e_1 x e_1 + \{e_1 x - e_1 x e_1\} + \{x e_1 - e_1 x e_1\} \\ &\quad + \{x - e_1 x - x e_1 + e_1 x e_1\} \end{aligned} \quad (2)$$

ergibt mindestens für eine Matrix x ein $x_{22} \neq 0$ oder $x_{12} \neq 0$. Im Falle $x_{12} \neq 0$ ist aber auch $z_{22} = x_{12}^\dagger x_{12} \neq 0$. Man beachte, daß folgende Multiplikationsregeln gelten:

$$x_{jk} y_{lm} = \delta_{ki} z_{jm}. \quad (2')$$

Also bilden die Matrizen x_{22} — gebildet aus sämtlichen x von \mathfrak{S} — eine Unteralgebra von \mathfrak{S} . Diese hat nach Induktionsvoraussetzung eine Haupteinheit e_2 , und wir bekommen $e = e_1 + e_2$ als Haupteinheit von \mathfrak{S} .

§ 4. Satz 2. Im Falle $N > 1$ gibt es in \mathfrak{S} eine hermitesche Einzelmatrix, die verschieden von der Haupteinheit e ist.

Beweis: Wieder sei $b = b^\dagger$ und außerdem $\neq \lambda e$, wenn λ eine Zahl ist. Es sei

$$F(b) = b^s + \mu_{s-1} b^{s-1} + \dots + \mu_0 e = 0 \quad (3)$$

die von b erfüllte Gleichung *niedrigsten* Grades s , also mit reellen μ_{s-1}, \dots, μ_0 . Dann sind die Wurzeln der Gleichung $F(\beta) = 0$ *sämtlich reell*. Wäre nämlich $F(b) = (b - \beta_1 e) f(b)$ und $\beta_1 \neq \beta_1^*$, so wäre $F(b) = (b - \beta_1 e)^\dagger (b - \beta_1 e) \varphi(b) = 0$, also erst recht $[(b - \beta_1 e) \varphi(b)]^\dagger (b - \beta_1 e) \varphi(b) = 0$; und da \mathfrak{S} formal-komplex ist, wäre schon $(b - \beta_1 e) \varphi(b) = 0$, entgegen der Voraussetzung.

Also ist $f(b)^\dagger = f(b)$; wegen $b f(b) = \beta_1 f(b)$ wird dann $f(b)^2 = f(\beta_1) f(b)$, also $e_1 = f(b)/f(\beta_1)$ eine hermitesche Einzelmatrix, die aber $\neq e$ ist wegen $F(b) = 0$.

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt nun unmittelbar: Die Haupteinheit e von \mathfrak{S} ist zu zerlegen in eine Summe von *orthogonalen, unzerlegbaren hermiteschen Einzelmatrizen*: $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ mit $e_j e_k = \delta_{jk} e_k$. Daß z. B. e_1 *unzerlegbar*, also nicht mehr als Summe zweier orthogonaler Einzelmatrizen darstellbar ist, bedingt, daß diejenige Unteralgebra von \mathfrak{S} , deren Haupteinheit gleich e_1 ist, nur aus Matrizen der Gestalt σe_1 ($\sigma = \text{Zahl}$)

besteht: $e_1 x e_1 = \sigma e_1$. Ferner wird $x_{k1}^\dagger x_{k1} = \sigma e_1$.

§ 5. Entsprechend der „Peirce-Zerlegung“ (2) zerlegen wir nun jedes x aus \mathfrak{S} in n^2 Summanden: $x = e x e = \sum_{jk} x_{jk} e_j e_k$; $x_{jk} = e_j x e_k$. (4)

Satz 3. Es gibt für jedes Indexpaar j, k ein $x_{jk} \neq 0$; aber niemals *zwei* linear unabhängige x_{jk} und y_{jk} .

Beweis: Da nur noch der Fall $j \neq k$ zu betrachten bleibt, genügt die Erledigung von $j = 1$ und $k = n$. Angenommen, die Behauptung sei falsch, und es gebe zwar $x_{1k} \neq 0$ für alle $k \leq s$, wo $s < n$ ist, dagegen sei stets $x_{1m} = 0$ für $m > s$; dann wird auch stets $x_{1k} x_{km} = 0$, also $x_{1k}^\dagger x_{1k} x_{km} = 0$, also $x_{km} = 0$ für alle $k \leq s$ und $m > s$. Danach wäre also \mathfrak{S} *nicht irreduzibel*, entgegen unserer Voraussetzung; denn die von e verschiedene Einzelmatrix $e_1 + e_2 + \dots + e_s$ wäre *vertauschbar* mit allen x aus \mathfrak{S} .

Daß zwei Matrizen x_{1n} und y_{1n} stets proportional sind, ergibt sich folgendermaßen: Zunächst normieren wir x_{1n} und y_{1n} so, daß $x_{1n}^\dagger x_{1n} = y_{1n}^\dagger y_{1n} = e_n$ wird. Aus $(y_{1n}^\dagger y_{1n}) (y_{1n}^\dagger y_{1n}) = y_{1n}^\dagger (y_{1n} y_{1n}^\dagger) y_{1n}$ lesen wir dann $y_{1n} y_{1n}^\dagger = e_1$ ab; und danach aus $(x_{1n}^\dagger y_{1n}) (y_{1n}^\dagger x_{1n}) = x_{1n}^\dagger (y_{1n} y_{1n}^\dagger) x_{1n}$ auch $x_{1n}^\dagger y_{1n} = \varepsilon e$ mit $|\varepsilon| = 1$. Für $u = \xi x_{1n} + \eta y_{1n}$ bekommen wir dann $u^\dagger u = |\xi + \varepsilon \eta|^2 e_n$, und für $\xi + \varepsilon \eta = 0$ also $u^\dagger u = 0$ und somit auch $u = 0$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Wir wählen nun $n-1$ derart normierte Elemente x_{1k} , die wir jetzt e_{1k} nennen. Wir fügen hinzu $e_{11} = e_1$ und definieren allgemein

$$e_{kj} = e_{1k}^\dagger e_{1j}. \quad (5)$$

Dann gelten die Beziehungen

$$e_{kj} e_{lm} = \delta_{jl} e_{km}; \quad e_{kj}^\dagger = e_{jk}. \quad (6)$$

Wir haben also bewiesen, daß die Matrixalgebra \mathfrak{S} genau die Matrix *aller* Matrizen n -ten Grades (mit beliebigen komplexen Matrixelementen) ist, wie es in § 1 behauptet wurde. Daraus sind dann leicht alle weiteren Sätze der Darstellungstheorie der endlichen Gruppen — oder auch unmittelbar die für die Quantenmechanik wichtigen Tatsachen — abzuleiten.

Die obige Herleitung ist stark beeinflusst von einer Arbeit von E. Artin⁴ sowie von mündlichen Erläuterungen, die mir Hr. Artin hierzu vor längeren Jahren gegeben hat. Die hier benutzte Begriffsbildung „formal-komplex“ ermöglicht eine einschneidende Abkürzung der Beweise.

⁴ E. Artin, Hamburger Abh. 5, 251 [1927].

Die Rotation kosmischer Gasmassen

Von CARL FRIEDRICH VON WEIZSÄCKER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. 3 a, 524–539 [1948]; eingegangen am 7. Juli 1948)

1. Die hydrodynamischen Gleichungen für die Bewegungen eines turbulenten Gases werden im Sinne der Prandtl'schen Theorie nochmals abgeleitet. Für die Anwendung auf kosmische Gasmassen wird dabei auch der Turbulenzdruck und die durch ihn bedingte Stabilität bzw. Labilität der Schichtung untersucht. Für die Ableitung der Turbulenzgeschwindigkeit aus der mittleren Geschwindigkeit wird ein invarianter Ausdruck angegeben.

2. Die Gleichungen werden in einem zweidimensionalen rotationssymmetrischen Modell genähert gelöst. Die turbulente Reibung löst eine rotierende Masse in einen Kern und eine ins Unendliche entweichende Hülle auf. In gewissen Fällen bilden sich in der Hülle „Saturnringe“. Der Kern bleibt in der hier gewählten Näherung, in welcher der Druck vernachlässigt ist, starr rotierend zurück. Berücksichtigung des Druckes würde ein langsames Erlöschen der Rotation ergeben. Eine spezielle Dichteverteilung wird quantitativ behandelt. Für allgemeinere Dichteverteilungen werden Näherungsformeln entwickelt und graphisch diskutiert.

3. Im dreidimensionalen Fall läßt sich die Rechnung nicht bis zu derselben Näherung treiben. Die Näherung einer flachen Scheibe wird diskutiert und der Sonderfall eines stationären Materiestroms bei großer Zentralmasse durchgerechnet. Qualitativ weichen die Ergebnisse vom zweidimensionalen Fall nicht ab.

4. Das Rotationsgesetz des Andromeda-Nebels scheint durch die hier entwickelten Methoden verständlich zu werden. Die turbulente Reibung hat die Tendenz, die im Andromeda-Nebel bestehende komplizierte Dichteverteilung (dichter Kern, dann ein Dichteminimum und weiter außen ein breiter Materiering) gegen den Druck aufrechtzuerhalten. Die äußersten Teile des Nebels sollten mit einer Geschwindigkeit von wenigen km/sec, welche ihrer Rotation überlagert ist, in den Weltraum abströmen. Damit ergibt sich eine Lebensdauer eines derartigen Gebildes von mehreren 10^9 Jahren. Es wird darauf hingewiesen, daß das empirische Rotationsgesetz des Nebels die Frage nahelegt, ob die Spiralstruktur von innen nach außen nicht einmal den Richtungssinn umkehrt.

1. Turbulenztheoretische Voraussetzungen

Auf Grund qualitativer Argumente wurde in zwei vorausgegangenen Arbeiten¹ behauptet, daß sich eine rotierende kosmische Gasmasse mit der Zeit in einen Kern und einen ins Unendliche entweichenden Rest auflösen muß. Die vorliegende Arbeit untersucht diesen Vorgang an einigen vereinfachten Modellen quantitativ und versucht einen ersten, vorläufigen Vergleich mit den Erfahrungen über die Rotation der Spiralnebel.

Wir brauchen eine quantitative Beschreibung der mittleren Strömung in einem turbulent bewegten Gas. Die Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik können geschrieben werden:

$$\varrho \left(\dot{v}_i + \sum_k v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = K_i + T_i, \quad (1, 1)$$

$$\dot{\varrho} = - \sum_k \frac{\partial (\varrho v_k)}{\partial x_k}. \quad (1, 2)$$

(1, 1) sind, für die drei Werte $i = 1, 2, 3$, die drei Bewegungsgleichungen, (1, 2) ist die Kontinuitätsgleichung. v_i ist die Komponente der Geschwindigkeit in der i -ten Koordinatenrichtung, ϱ die Dichte des Gases. K_i sei die i -te Komponente der äußeren Kräfte, zu denen hier auch die Gravitationswirkung des Gases auf sich selbst als weitreichende Kraft gerechnet werden soll. Für ein Gas, das keinen anderen äußeren Kräften unterliegt, ergibt sich K_i aus den Gleichungen

$$K_i = - \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad (1, 3)$$

$$\Delta \Phi = \kappa \varrho. \quad (1, 4)$$

Φ ist das Gravitationspotential, das von der Dichte ϱ erzeugt wird; $\kappa = 4\pi G$, und G ist die Gravitationskonstante $6,6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{g sec}^2$.

¹ C. F. v. Weizsäcker, Z. Astrophysik **22**, 319 [1944] (Planetensystem, als [P] zitiert); ebenda **24**, 181 [1947] (Kosmogonie, als [K] zitiert).

Das physikalische Problem der Gl. (1,1) liegt in der Berechnung der inneren Kräfte T_i . Setzen wir für T_i nur den Gradienten des Gasdrucks und die molekulare innere Reibung ein, so können wir die Lösungen der Gleichung nicht anschreiben, da die Gasbewegungen im Kosmos im allgemeinen turbulent sind. Wir wollen daher unter v_i nicht die wahre momentane Geschwindigkeit an dem betrachteten Ort, sondern einen geeignet definierten Mittelwert dieser Größe verstehen; den genauen Sinn dieser Mittelbildung werden wir sofort erörtern. (1,1) ist dann die Gleichung für die „mittlere Strömung“ im Sinne der Turbulenz-Hydrodynamik. Die Abweichung der wahren Geschwindigkeit vom Mittelwert nennen wir die turbulente Zusatzgeschwindigkeit w_i . Ihre Wirkung wird ebenfalls nur im Zeitmittel betrachtet und äußert sich im Auftreten eines zusätzlichen Druck- und Reibungsgliedes. Neben diesen Gliedern sollen in der vorliegenden Arbeit der thermische Gasdruck und die molekulare innere Reibung vernachlässigt werden. Dies bedarf für die Reibung keiner besonderen Rechtfertigung; in jeder turbulenten Strömung überwiegt der turbulente Impulsaustausch die molekulare Zähigkeit, und in unseren kosmischen Problemen gibt es keine festen Begrenzungen der Strömung, also nicht einmal laminare Grenzschichten. Hingegen pflegt bei irdischen Strömungen der thermische Druck den „Turbulenzdruck“ zu überwiegen, da die thermischen Geschwindigkeiten der Moleküle meist groß sind, verglichen mit den Strömungsgeschwindigkeiten der Turbulenzelemente. Im Kosmos ist es aber, wenigstens für Gasmassen von der Größenordnung der extragalaktischen Nebel, umgekehrt.

Bei stationären Strömungen der irdischen Hydrodynamik pflegt man die mittlere Strömung durch einen Zeitmittelwert zu definieren. Wir wollen aber nichtstationäre Probleme, wie die Auflösung einer Gasmasse, behandeln. Man kann die Zeitmittelung in einem eingeschränkten Sinne beibehalten, da die turbulente Zusatzgeschwindigkeit sich rascher ändert als die mittlere Geschwindigkeit. Die durchschnittliche Lebensdauer eines Turbulenzelements vom Durchmesser l ist² proportional zu $l^{2/3}$. Qualitativ läßt sich dies so verstehen: die Zeit, in der ein Geschwindigkeitsfeld seine Gestalt wesentlich ändert, ist umgekehrt proportional zum

Geschwindigkeitsgradienten, und dieser ist für die turbulente Feinstruktur größer als für die Mittelwerte. Man wird also etwa eine Zeitspanne T so definieren können, daß der Mittelwert von v_i , genommen über T , von demselben Mittelwert, genommen über $2T$, nicht erheblich verschieden ist, während er sich von dem über $T/100$ (Turbulenz) oder über $100T$ (Auflösung) stark unterscheidet. Die Ungenauigkeit, die in diesem Ansatz bleibt, drückt nicht einen mathematischen Mangel der Rechenmethode, sondern die wirkliche Schwankungsbreite des Geschehens aus; in der Tat gleicht kein Spiralnebel dem anderen genau. Es ist daher sinnlos, einen zu hohen Genauigkeitsgrad in der Auflösung unserer Gleichungen anzustreben.

Man könnte statt der Zeitmittelung viele anfangs gleichartige Gasmassen betrachten und v_i als Scharmittelwert definieren³. Dann wären die Gleichungen für v_i exakt und die Schwankungsbreite könnte gesondert untersucht werden. Zu einer strengen statistischen Methode wird dieser Vorschlag aber erst durch eine genaue Definition des Begriffs „anfangs gleichartig“. Exakte Gleichheit des turbulenten Strömungsfeldes in jeder Einzelheit ist nicht feststellbar und würde zudem zu einer exakt gleichen Weiterentwicklung, also zu keiner Statistik führen. Gleichheit bezüglich der mittleren Größen darf sich, um nicht in einen Zirkel zu verfallen, nicht auf die Scharmittelwerte stützen (jedes zur „Schar“ gerechnete System hat per definitionem dasselbe mittlere v_i); also muß hier wiederum eine andere, etwa räumliche Mittelung herangezogen werden. Dieses Problem soll hier nicht weiter verfolgt werden.

Die Dichte ϱ wird im folgenden im selben Sinne wie v_i als Mittelwert aufgefaßt. Dieses ϱ variiert im Gas mit dem Ort und, durch Konvektion, auch mit der Zeit. Abgesehen wird aber von den Dichteschwankungen, die durch die Turbulenz selbst verursacht sind und bei der Mittelung fortfallen. Das heißt die Strömung wird als „inkompressibel gegen Turbulenz“ behandelt. Der Grund hierfür ist lediglich die mathematische Vereinfachung und die Erleichterung des Anschlusses an die schon vorhandene Turbulenztheorie inkompressibler Flüssigkeiten. Physikalisch ist diese Vernachlässigung nicht gerechtfertigt, denn die Turbulenzgeschwindigkeit ist im Kosmos meist größer als die Schallgeschwindigkeit. Eine nähere Untersuchung der „kosmischen Gasdynamik“ ist aber wahrscheinlich nur sinnvoll in Verbindung

² C. F. v. Weizsäcker, Z. Physik, im Erscheinen.

³ Dies hat Hr. Heckmann in einer Diskussion vorgeschlagen.

mit einer Betrachtung der gravitativen Instabilität einer Gasmasse von örtlich variabler Dichte. Diese Frage kann in dieser Arbeit nicht mehr untersucht werden.

Die innere Kraft T_i ergibt sich aus dem Spannungstensor τ_{ik} nach der Gleichung

$$T_i = - \sum_k \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}. \quad (1, 5)$$

Der Spannungstensor rührt her von dem durch die turbulente Strömung w_i vermittelten Impulstransport und lautet

$$\tau_{ik} = \varrho \overline{w_i w_k}. \quad (1, 6)$$

Indem wir den Faktor ϱ nicht auch unter den Mittelungsstrich schreiben, drücken wir die Voraussetzung der Inkompressibilität gegen Turbulenz aus. Während $\overline{w_i} = 0$ ist, ist $\overline{w_i w_k} \neq 0$. Für $i = k$ ergibt sich als erstes Glied der Druckanteil der inneren Kraft:

$$T_i^P = -\varrho \frac{\partial \overline{w_i^2}}{\partial x_i}. \quad (1, 7)$$

Wenn die Verteilung der w_i isotrop ist, kann man schreiben

$$T_i^P = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (1, 8)$$

mit

$$p = \frac{\varrho}{3} \overline{w^2} = \frac{2}{3} \varepsilon, \quad (1, 9)$$

wobei w der mittlere Betrag der Turbulenzgeschwindigkeit und ε die Energiedichte der Turbulenz ist.

Auch für $i \neq k$ von Null verschieden ergeben sich die den Reibungsgliedern der kinetischen Gastheorie entsprechenden Ausdrücke. Wir leiten sie nach der Prandtl'schen Überlegung des Mischungswegs in einer von Ertel⁴ angegebenen Form her. Die am Punkt P momentan herrschende Zusatzgeschwindigkeit w_i sei durch ein Turbulenzelement vom Punkt P' nach P transportiert. P' ist also der ungefähre Ort des letzten größeren Impulsaustausches. Der Vektor PP' habe die Komponenten l_i . w_i zerfällt in zwei Summanden: den Unterschied der mittleren Geschwindigkeiten \bar{v}_i an den Orten P und P' und die Zusatzgeschwindigkeit w'_i , die sich am Ort P' beim Impulsaustausch eingestellt hat. Das heißt

$$w_i = \sum_j l_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + w'_i. \quad (1, 10)$$

Wir setzen (1,10) in (1,6) ein und vernachlässigen folgende Glieder: $w'_i w'_k$, indem wir annehmen, daß im Augenblick der Entstehung der Zusatzgeschwindigkeit keine statistische Koppelung zwischen den Vorzeichen ihrer Komponenten bestehe; $l_i w'_k$ und analog gebaute Glieder für $j \neq k$, aus entsprechenden Gründen; das Produkt der beiden ersten Summanden in w_i und w_k , weil der entsprechende Ausdruck in der Ableitung der molekularen Reibung nach der kinetischen Gastheorie vernachlässigt werden kann. Alle diese Vernachlässigungen sind problematisch und dienen hier nur der Reduktion der Gleichungen auf einen erträglichen Grad der Einfachheit. Aus demselben Grunde nehmen wir schließlich Isotropie des Impulsaustausches an und erhalten

$$\varrho \overline{w_i w_k} = -\eta \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right) \quad (1, 11)$$

mit

$$\eta = -\varrho \overline{l_i w'_i} = \varrho l w. \quad (1, 12)$$

Die Korrelation von l_i und w'_i ist negativ; von rechts ankommende Turbulenzelemente bewegen sich nach links. l , der „mittlere Mischungsweg“ am Orte P, ist durch (1,12) definiert. η ist die turbulente Zähigkeit oder die „Austauschgröße“. In (1,11) müssen auch die Glieder mit $i = k$ mitgenommen werden. Sie treten zum Druck additiv hinzu. Die Annahme der Isotropie von w_i , die bei der Ableitung von (1,8) gemacht wurde, kann nämlich strenggenommen höchstens für w'_i gelten. Der Druck ergibt sich also aus dem Summanden $\overline{w'_i w'_i}$, und neben ihm tritt die „Expansionsreibung“.

Um die Gleichungen anwenden zu können, müssen wir l und w als Funktion des Orts bestimmen.

Den Mischungsweg legt man nach Prandtl in der Strömungslehre meist durch geometrische Betrachtungen fest; man setzt ihn etwa proportional zum Abstand von der Gefäßwand. Bei den rotationssymmetrischen Strömungen im freien Raum, die wir betrachten wollen, ist nur die Rotationsachse geometrisch ausgezeichnet. Wir setzen daher l für Bewegungen in einer zur Rotationsachse senkrechten Ebene proportional zum Abstand um die Achse, wenn nicht die besonderen Bedingungen des Einzelfalls eine andere Wahl nahelegen. Eine physikalische Bedingung, an welche diese Wahl

⁴ H. Ertel, S.-B. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. 26 [1932].

geknüpft ist, sei hier hervorgehoben: die Schichtung darf nicht „turbulenzstabil“ sein. Der Turbulenzdruck erzeugt ja wie der thermische Druck einen Auftrieb. Sind Dichte und Turbulenzgeschwindigkeit Funktionen des Orts, so gibt es ein Analogon zur thermischen Stabilität bzw. Labilität der Schichtung. Bei einer „adiabatischen“ Verschiebung eines Turbulenzelements wird sich sein Turbulenzdruck nach der Formel $p \sim \varrho^{5/3}$ ändern; allerdings ist der Transport von Turbulenzenergie durch die nächstkleineren Turbulenzelemente nie sehr klein und daher die Annäherung der Adiabase, wie alle thermischen Gleichnisse in der Turbulenzdynamik, ungenau. Da andererseits p durch (1,9) gegeben ist, folgt $w \sim \varrho^{1/3}$. Kommt das Turbulenzelement bei einer Verschiebung im Sinne wachsender Dichte in eine Umgebung, in der w größer ist als nach dieser Formel, so ist es nun dichter als seine Umgebung und sinkt daher weiter ab. Das heißt, die Schichtung ist labil, wenn w und ϱ so vom Ort abhängen, daß

$$\frac{\partial w}{\partial \varrho} > \frac{w}{3\varrho}. \quad (1,13)$$

Wir werden finden, daß diese Bedingung im allgemeinen beim Fortschreiten senkrecht zur Rotationsachse erfüllt, parallel zur Achse aber nicht erfüllt ist; daß also der Mischungsweg in einer abgeplatteten rotierenden Masse in der Hauptebene groß, senkrecht zu ihr klein sein wird.

Die Turbulenzgeschwindigkeit w setzt Prandtl proportional zum Produkt aus dem Mischungsweg und dem Quergefälle der mittleren Geschwindigkeit:

$$w = \delta l \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (1,14)$$

wobei x die mittlere Strömungsrichtung und δ eine reine Zahl ist. Anschaulich: w entsteht durch die Vermischung von Teilchen, deren mittlere Geschwindigkeiten Punkten entsprechen, die um den Mischungsweg auseinander liegen. Da wir mit krummlinigen Strömungsverläufen zu tun haben, müssen wir w durch einen invarianten Ausdruck darstellen. Dazu leiten wir eine zu (1,14) äquivalente Gleichung durch eine energetische Überlegung⁵ nochmals ab. Die mittlere Strömung verliert an die turbulente pro cm^3 und sec im Mittel die Energie

$$S_0 = \eta v'^2, \quad (1,15)$$

wobei v'^2 eine Abkürzung ist für den Ausdruck

$$v'^2 = \sum_{ik} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right]. \quad (1,16)$$

Diese Energie kommt im wesentlichen den größten Turbulenzelementen zugute. Die direkt in kleinere Elemente übergehende Energie ist ein fester, kleiner Bruchteil von S_0 . w ist daher ein Maß für die Geschwindigkeit der größten Elemente. Wir berechnen nun den Energieübergang aus diesen größten in die nächstkleineren Turbulenzelemente:

$$S_1 = \eta_1 w'^2. \quad (1,17)$$

w' ist wie v' gebildet. η_1 bestimmt sich analog zu η , wobei für l und w nun Mischungsweg und mittlere Geschwindigkeit der nächstkleineren Elemente einzusetzen sind:

$$\eta_1 = \varrho l_1 w_1. \quad (1,18)$$

l_1 und w_1 sind jeweils um einen festen Faktor kleiner als l und w , also ist auch

$$\eta_1 = \text{const } \varrho l w = \text{const } \eta. \quad (1,19)$$

w'^2 kann aus entsprechenden Dimensionsgründen nur von w und l abhängen, also ist im Mittel

$$w'^2 = \text{const } \frac{w^2}{l^2}. \quad (1,20)$$

Nun müssen die größten Turbulenzelemente im stationären Betrieb alle Energie, die sie gewinnen, in derselben Zeit auch wieder verlieren, also ist $S_0 = S_1$, d. h. $v'^2 = \text{const } w'^2$ und daher nach (1,20)

$$w = \delta l v'. \quad (1,21)$$

Diese Formel hat denselben Bau wie (1,13), daher wurde die Konstante mit demselben Buchstaben bezeichnet; sie enthält aber die invariante Bildung v' .

2. Zweidimensionale Modelle⁶

a) Grundgleichungen. Die Lösung der hydrodynamischen Gleichungen im dreidimensionalen Raum ist nur in einfachen Grenzfällen möglich. Um das Prinzipielle der Rotations- und Turbulenzeffekte zu diskutieren, ist es daher zweckmäßig, zunächst die Vorgänge in einer fiktiven zweidimensionalen Welt zu untersuchen.

⁶ Die wichtigsten mathematischen Verfahren dieses und des nächsten Abschnitts verdanke ich dem Rat von W. Heisenberg.

⁵ Vgl. Anm. 2.

Wir beschränken uns auf kreissymmetrische Strömungen. Führen wir Polarkoordinaten s, φ um den Strömungsmittelpunkt ein und berücksichtigen, daß wegen der Kreissymmetrie alle Ableitungen nach φ verschwinden, so nehmen die Bewegungsgleichungen die Form an:

$$\varrho \left(\dot{v}_s + v_s v'_s - \frac{v_\varphi^2}{s} \right) = -\varrho \Phi' - p' + T_s, \quad (2,1)$$

$$\varrho \left(\dot{v}_\varphi + v_s v'_\varphi + \frac{v_s v_\varphi}{s} \right) = T_\varphi, \quad (2,2)$$

$$\dot{\varrho} = -\frac{1}{s} (s \varrho v'_s), \quad (2,3)$$

$$\frac{1}{s} (s \Phi') = z \varrho. \quad (2,4)$$

v_s und v_φ sind die radiale und tangentielle Komponente der Geschwindigkeit, der Strich bezeichnet die Ableitung nach s . T_s und T_φ sind die Komponenten der Reibungskraft. Nach (1,5), (1,6) und (1,11) haben sie in Polarkoordinaten die Form

$$T_s = 2 \eta' v'_s + 2 \eta \left(v''_s + \frac{v'_s}{s} - \frac{v_s}{s^2} \right), \quad (2,5)$$

$$T_\varphi = \eta' \left(v'_\varphi - \frac{v_\varphi}{s} \right) + \eta \left(v''_\varphi + \frac{v'_\varphi}{s} - \frac{v_\varphi}{s^2} \right) \\ = \frac{1}{s^2} [\eta s \cdot s^2 \omega']' \quad (2,6)$$

mit

$$\omega = \frac{v_\varphi}{s}. \quad (2,7)$$

ω ist die Winkelgeschwindigkeit. Zu den Dimensionen sei bemerkt, daß jetzt ϱ in g/cm^2 zu messen und z von der Dimension $\text{cm}^2/\text{g sec}^2$ ist.

Da die folgenden Rechnungen nur Modellcharakter haben sollen, vernachlässigen wir die Ausdrücke, welche die Gleichungen komplizieren, ohne ihren Charakter zu ändern. Es sind dies die radiale Reibung T_s , welche ohnehin klein gegen die Schwerkraft ist, und zunächst auch der Turbulenzdruck. Wir setzen also voraus, das Gas sei so dünn verteilt, daß jedes Teilchen unter dem Einfluß von Schwerkraft und Trägheit allein auf einer stationären Kreisbahn läuft. Die einzige Kraft, die dieses Gleichgewicht stört, ist dann die tangentielle Reibung T_φ , deren Abhängigkeit von den übrigen Variablen wir nach den Methoden des Abschn. 1 bestimmen. Der Mischungsweg soll

$$l = \alpha s \quad (2,8)$$

gesetzt werden; der Zahlfaktor $\alpha < 1$ kann für die Modellrechnungen unbestimmt bleiben. Für v' folgt aus (1,6)

$$v'^2 = 2 \left[v_s'^2 + \left(\frac{v_s}{s} \right)^2 \right] + \left(v'_\varphi - \frac{v_\varphi}{s} \right)^2. \quad (2,9)$$

Wir werden im folgenden Strömungen betrachten, deren radiale Komponente klein ist gegen die tangentielle. Für diese dürfen wir v_s neben v_φ vernachlässigen und erhalten unter Benutzung der Winkelgeschwindigkeit

$$v' = |s \omega'|. \quad (2,10)$$

v' ist die positive Wurzel aus v'^2 . Da Bewegungen, bei denen die Winkelgeschwindigkeit mit wachsendem s wächst, im allgemeinen nicht vorkommen, ist ω' meist negativ. Wir setzen daher

$$v' = -s \omega' f. \quad (2,11)$$

f ist das negative Vorzeichen von ω'

$$f = -\frac{\omega'}{|\omega'|} \quad (2,12)$$

und meist gleich +1.

Aus (1,12) und (1,21) folgt nun

$$\eta = \beta \varrho s^2 v' = \beta \varrho s^3 |\omega'| \quad (2,13)$$

mit einer neuen Zahlkonstante β . Dies, in (2,6) eingesetzt, ergibt

$$T_\varphi = -\frac{\beta}{s^2} [s^6 \omega'^2 \varrho]' f. \quad (2,14)$$

b) Lösung ohne Reibung. Wir berechnen zunächst die stationäre Verteilung von Dichte und Geschwindigkeit, welche sich ohne Reibung bei reiner Kreisbewegung einstellt. Wir setzen also $v_s, T_\varphi, \dot{\varrho}$ und \dot{v}_φ gleich Null. (2,2) und (2,3) sind dann von selbst erfüllt. (2,1) lautet

$$\frac{v_\varphi^2}{s} = \Phi', \quad (2,15)$$

d. h. die Zentrifugalkraft ist gleich der Schwerkraft. (2,4) und (2,15) sind zwei Beziehungen zwischen den drei Funktionen v_φ, ϱ und Φ' , die alle nur von s abhängen. Wir können also eine von ihnen in gewissen Grenzen willkürlich vorgeben. Physikalisch bedeutet diese Freiheit der Wahl folgendes: Gibt man z. B. die Dichteverteilung $\varrho(s)$ vor, so ist damit das Gravitationsfeld $\Phi(s)$ bestimmt. In diesem kann man die Geschwindigkeitsverteilung $v_\varphi(s)$ bzw. $\omega(s)$ so wäh-

len, daß die Zentrifugalkraft der Schwerkraft überall das Gleichgewicht hält. Es ist zweckmäßig, eine neue Variable ζ einzuführen durch die Gleichung

$$\zeta = s \Phi'. \quad (2, 16)$$

Damit lautet (2, 4)

$$q = \frac{1}{zs} \zeta' \quad (2, 17)$$

und (2, 15)

$$v_\Phi^2 = (s\omega)^2 = \zeta. \quad (2, 18)$$

Die beiden letzten Gleichungen gestatten, aus einer gegebenen Dichteverteilung die zugehörige Geschwindigkeitsverteilung auszurechnen, und umgekehrt. ζ ist ein Maß der Materiemenge im Kreis vom Radius s . Denn diese ist

$$M_s = 2\pi \int_0^s q s ds = \frac{2\pi}{z} \zeta. \quad (2, 19)$$

c) Einfluß der Reibung. Wenn $T_\Phi \neq 0$ ist, müssen nach (2, 2) auch \dot{v}_Φ oder v_s oder, im allgemeinen, beide von Null verschieden sein. Die Reibung ändert die Tangentialgeschwindigkeit, stört dadurch das Gleichgewicht von Gravitation und Zentrifugalkraft und erzeugt so radiale Strömungen. Wir behandeln die Reibung als kleine Störung und somit \dot{v}_Φ und v_s als klein von erster Ordnung. v_s , v_s' und damit, nach (2, 1), auch \dot{v}_s sind dann klein von zweiter Ordnung und werden vernachlässigt. Die Gleichungen (2, 16) bis (2, 18) bleiben demnach richtig. Differenziert man (2, 19) nach der Zeit und setzt für \dot{q} aus (2, 3) und für q aus (2, 17) ein, so erhält man die Gleichung

$$\dot{\zeta} = -v_s \zeta', \quad (2, 20)$$

die anschaulich als eine andere Fassung der Kontinuitätsgleichung zu deuten ist: die zeitliche Änderung der in einem Kreis enthaltenen Masse ist gleich der wegtransportierten Masse. Wegen (2, 18) ist dies gleichbedeutend mit

$$\dot{v}_\Phi + v_s v'_\Phi = 0, \quad (2, 21)$$

und daher erhält (2, 2) die Form

$$q v_s \omega = T_\Phi. \quad (2, 22)$$

Wegen (2, 17), (2, 20) und (2, 18) ist

$$q v_s = \frac{1}{zs} v_s \zeta' = -\frac{\dot{\zeta}}{zs} = -\frac{2\omega s}{z} \dot{\omega} \quad (2, 23)$$

und daher

$$\dot{\omega} = -\frac{z T_\Phi}{2s\omega^2}. \quad (2, 24)$$

Setzen wir T_Φ aus (2, 14) und q aus (2, 17), (2, 18) ein, so erhalten wir eine Gleichung, welche die zeitliche Änderung von ω durch ω und ω' allein ausdrückt:

$$\dot{\omega} = \frac{f\beta z}{2s^2\omega^2} [s^6 \omega'^2 q]' = \frac{f\beta}{2s^2\omega^2} [s^5 \omega'^2 (s\omega)^2]' \quad (2, 25)$$

Um diese Gleichung zu diskutieren, fragen wir zunächst nach den Bedingungen, unter denen $\dot{\omega}$ verschwindet, der Vorgang also trotz der Reibung stationär ist. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

- a) $\omega' = 0,$
- b) $q = 0,$ (2, 26)
- c) $[s^5 \omega'^2 q]' = 0,$ obwohl ω' und $q \neq 0.$

Der Fall a) bedeutet starre Rotation. Es folgt dann

$$q = \frac{1}{zs} \omega^2 s^2 = \frac{2\omega^2}{z} = \text{const.} \quad (2, 27)$$

Eine starr rotierende Gasmasse konstanter Dichte ist also eine mögliche Lösung unserer Gleichungen. Diese Lösung wäre allerdings nicht mehr streng möglich, wenn das Druckglied berücksichtigt würde. Darüber wird weiter unten gesprochen.

Der Fall b) ist nicht in der trivialen Form exakt verschwindender Dichte wichtig, sondern als Grenzfall. Er bedeutet $\zeta = \text{const.}$ also $v_\Phi = \text{const.}$

$\omega \sim \frac{1}{s}$. Dies ist das Analogon des dritten Keplerschen Gesetzes in der zweidimensionalen Welt: ein Planet bewegt sich um eine große Zentralmasse mit einer vom Abstand unabhängigen Linear- geschwindigkeit.

Der Fall c) bedeutet eine komplizierte Differentialbeziehung zwischen ω und q , die im allgemeinen nur für einzelne q -Werte realisiert ist.

Aus den Fällen a) und b) lassen sich beliebige Kombinationen zusammensetzen, die im allgemeinen so aussehen: Es möge eine starr rotierende Masse der Winkelgeschwindigkeit ω_0 und Dichte q_0 um den Nullpunkt versammelt sein. Sie hat eine scharfe Grenze s_0 . Es folgt eine Zone $q = 0$ bis zu einem Wert s_1 , dann ein Kreisring zwischen s_1 und s_2 , der wieder starr rotiert. Bedin-

gung ist nur, daß bei s_1 (2,18) erfüllt wird, d. h. daß v_φ bei s_1 denselben Wert hat wie bei s_0 . Daraus folgen feste Werte für ω und ϱ im Kreisring:

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{s_0}{s_1} \quad \text{und} \quad \varrho_1 = \frac{2 \omega_1^2}{\pi} = \varrho_0 \left(\frac{s_0}{s_1} \right)^2. \quad (2,28)$$

Die Bedingung für ϱ_1 bedeutet: Die Dichte im Kreisring muß gleich sein der mittleren Dichte, gemessen über den ganzen Kreis vom Radius s_1 . Außen können beliebig viele weitere, durch Vakuum getrennte Kreisringe anschließen. Die Differentialgleichung (2,25) gilt auch an den Be-

tungssinn der herrschenden Winkelgeschwindigkeit bewirkt eine zentrifugale Bewegungskomponente. Nun nimmt bei zentrifugaler Strömung am Ort s die im Kreis vom Radius s enthaltene Masse ab, also muß auch die Zentrifugalkraft an diesem Ort, d. h. ω , abnehmen: $\dot{\omega}$ hat stets dasselbe Vorzeichen wie $\dot{\zeta}$. Welches Vorzeichen T_φ bei gegebener Verteilung von ϱ und ω annimmt, soll im folgenden näher untersucht werden.

d) Eine spezielle Dichteverteilung. Die Abb. 1 zeigt die Eigenschaften einer Materieverteilung, die durch die Dichteverteilung

$$\varrho = \frac{\text{const}}{[1 + (s/s_0)^2]^2} \quad (2,29)$$

und die dazu nach (2,17), (2,18) passende Verteilung der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\text{const}}{\sqrt{1 + (s/s_0)^2}} \quad (2,30)$$

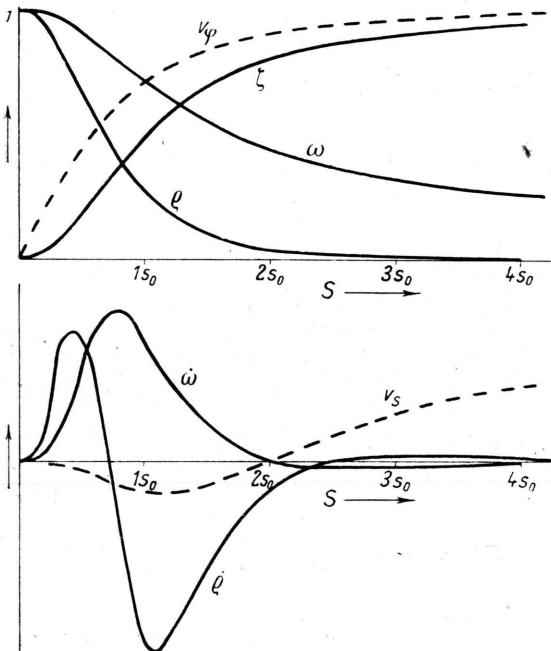


Abb. 1. Zustandsgrößen und ihre zeitlichen Änderungen im Modell von Abschn. 2d.

rührungspunkten s_0 , s_1 usw., da auf jeder Seite dieser Punkte eine der beiden Größen ω' und ϱ verschwindet, die eckige Klammer also stetig übergeht.

Wenn $T_\varphi \neq 0$ ist, haben wir zunächst auf das Vorzeichen von $\dot{\omega}$ zu achten. Es ist nach (2,24) entgegengesetzt dem von T_φ . Dies mag zunächst seltsam scheinen, denn es bedeutet, daß eine Reibungskraft in der Richtung wachsender φ eine Abnahme der lokalen Geschwindigkeit in der φ -Richtung bewirkt. Die Erklärung liegt darin, daß (2,24) schon mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung abgeleitet ist. Nach (2,22) bedingt positives T_φ ein positives $v_s \omega$: eine tangentielle Kraft im Rich-

charakterisiert ist. Sie kann als Modell einer „normalen“ Verteilung gelten. ω und ϱ beginnen im Mittelpunkt mit waagerechter Tangente. Das entspricht der Forderung, daß das Potential dort ein Minimum hat und die Rotation sich daher der starren nähert. Außen muß ω wie $1/s$ abnehmen, denn v_φ muß, wie oben gezeigt, im Unendlichen konstant werden. Daß ϱ für große s wie $1/s^4$ abnimmt, ist eine spezielle Eigenschaft der hier gewählten Lösung; die allgemeinste Entwicklung von ϱ für große s beginnt mit einem Glied der Form $1/s^3$.

Im unteren Teil der Abb. sind die drei für die Zustandsänderung charakteristischen Größen angegeben, die aus (2,25) und (2,30) folgen. $\dot{\omega}$ wird dreimal Null: für $s = 0$, $s = 2s_0$ und $s \rightarrow \infty$. Bei $s = 0$ liegt der Fall a) vor (2,26), bei $s = \infty$ der Fall b), bei $s = 2s_0$ der Fall c). Für $s < 2s_0$ ist v_s negativ, die Materie strömt nach innen, für $s > 2s_0$ strömt sie nach außen. Dementsprechend nimmt die Dichte ganz innen zu ($\dot{\varrho} > 0$), in der Umgebung von $s = 2s_0$ ab, und außen wieder zu. $\dot{\varrho}$ verschwindet aber für $s = 0$ und $s = \infty$. Die Dichteverteilung strebt innen gegen $\varrho = \text{const}$, außen letzten Endes gegen $\varrho = 0$. Der Endzustand ist also voraussichtlich eine starr rotierende Restmasse innen und ein Entweichen der übrigen Masse ins Unendliche. Dabei wird aber ein Stadium durchlaufen, in dem sich in der Umgebung

von $s = 3s_0$ ein „Saturnring“ bildet, denn dort ist in der Abb. $\dot{q} > 0$. Eine numerische Integration soll die weitere Entwicklung ermitteln.

Daß auch die Restmasse im Innern ihre Rotation verliert, kommt in diesem Bilde nicht vor. In Wirklichkeit wird der hier vernachlässigte Druck diese Wirkung haben. Denn er verhindert, daß sich ein unendlich steiler Dichteabfall am Rand der Restmasse bildet. In einem allmählichen Dichteabfall kann aber ω nicht konstant sein, und daher geht in der Oberflächenschicht der Auflösungsprozeß stetig weiter. Dieser Vorgang soll in einer anderen Arbeit untersucht werden.

Es sei bemerkt, daß unsere Rechnung auch insofern nur Modellcharakter hat, als in der Verteilung nicht überall das Labilitätskriterium (1,13) erfüllt ist. Setzt man zunächst, so wie es in der Berechnung von $\dot{\omega}$, v_s und \dot{q} geschehen ist, überall $l = \alpha s$, so kann man die Bedingung (1,13) in der Form schreiben:

$$\frac{3q}{w} \frac{\partial w}{\partial q} = \left| \frac{3q}{q'} \frac{\omega''}{\omega'} \right| = \frac{3}{4} \left| 2 - \left(\frac{s}{s_0} \right)^2 \right| > 1. \quad (2,31)$$

Dies ist nur für $s < 0,82s_0$ und für $s > 1,82s_0$ der Fall. Im Zwischengebiet ist die Schichtung nach dieser Formel stabil, also vermutlich der Ansatz $l = \alpha s$ gar nicht richtig. Es lohnt wohl nicht, dieser Frage an diesem abstrakten Beispiel weiter nachzugehen.

e) Allgemeine Diskussion des Vorzeichens von $\dot{\omega}$. Es sei eine Verteilung $\omega(s)$ und $q(s)$ numerisch vorgegeben. Wir fragen nach dem Vorzeichen von $\dot{\omega}$ für ein gegebenes s . Nach (2,26) muß man ω in der Umgebung von s bis zur zweiten Ableitung nach s , und q bis zur ersten Ableitung nach s kennen. Sei ω_0 der Wert von ω an der Stelle s_0 und q_0 der Mittelwert von q über den Kreis vom Radius s_0 und heißt

$$\frac{s - s_0}{s} = \xi, \quad (2,32)$$

so ist

$$\omega = \omega_0 (1 + b\xi + c\xi^2 + \dots), \quad (2,33)$$

$$q = q_0 (1 + \mu\xi + \dots). \quad (2,34)$$

Es gilt

$$2\omega_0^2 = \alpha q_0 \quad (2,35)$$

und

$$b = \lambda - 1, \quad (2,36)$$

$$2c = 2 + \mu - \lambda - \lambda^2.$$

Mit den lokalen Funktionswerten und Ableitun-

gen sind die Koeffizienten verknüpft durch:

$$b = \frac{s_0 \omega'}{\omega_0}, \quad c = \frac{s_0^2 \omega''}{2\omega_0}, \quad \lambda = \frac{q}{q_0}, \quad \mu = \frac{s_0 q'}{q_0}. \quad (2,37)$$

Wir führen eine dimensionslose Funktion χ ein, welche mit $\dot{\omega}$ stets gleiches Vorzeichen hat:

$$\chi = \frac{\dot{\omega}}{\alpha^2 \omega_0^2} = \frac{f[l^2 s \omega'^2 q]'}{\alpha^2 s_0^3 \omega_0^2 q_0}. \quad (2,38)$$

In diesem Ausdruck ist noch nicht $l = \alpha s$ gesetzt. Es sollen auch Fälle betrachtet werden, in

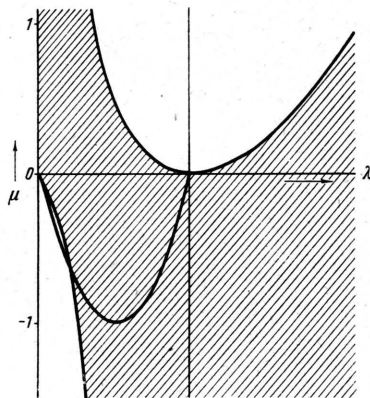


Abb. 2. Vorzeichenfunktion für den Fall α .

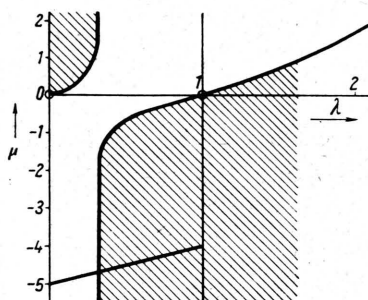


Abb. 3. Vorzeichenfunktion für den Fall β .

denen nur in einem schmalen Gebiet starke Turbulenz vorkommt. Wir diskutieren daher zwei verschiedene Ansätze:

$$\alpha) l = \alpha s, \quad \beta) l = \text{const}. \quad (2,39)$$

$\beta)$ mag bei fest gegebener Breite des Turbulenzgebiets sinnvoll sein. Es folgen die Formeln:

$$\alpha) \chi = |\lambda - 1| \{ 2\lambda(\lambda - 1)^2 - \mu(3\lambda - 1) \}, \quad (2,40)$$

$$\beta) \chi = |\lambda - 1| \{ 2\lambda^2(\lambda - 1) - \mu(3\lambda - 1) \}.$$

In den Abb. 2 und 3 sind λ und μ für die beiden Fälle als Abszisse und Ordinate gewählt und die

Kurven $\chi = 0$ sowie die Gebiete $\chi > 0$ (schraffiert) bezeichnet. $\chi > 0$ heißt $\dot{\omega} > 0$ und $v_s < 0$, also Strömung der Materie nach innen, $\chi < 0$ Strömung nach außen. Den drei Fällen (2,26) entsprechen:

- a) lokal starre Rotation $\lambda = 1, \mu$ beliebig,
- b) Dichte 0 $\lambda = \mu = 0$,
- c) Trennungsort des Aus- und Einströmens $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \\ \mu \end{array} \right\} = 0$.

a) ist eine senkrechte Gerade im Diagramm, sie bedeutet $\dot{\omega}' = 0$ und $\varrho = \varrho_0$. χ ist auf dieser Geraden zwar Null, kehrt aber nicht das Vorzeichen um. Für b) genügt nicht $\lambda = 0$, denn wenn gleichzeitig $\mu \neq 0$ wäre, würden negative Dichten in der Nachbarschaft von s_0 auftreten.

c) ist eine Kurve, die in beiden Fällen aus zwei Ästen besteht und bei $\lambda = 1/3$ ins Unendliche geht. Für diesen besonderen Wert der Dichte gibt es im Fall α) nur Strömung nach innen, im Fall β) nur Strömung nach außen. Für jede andere Dichte gibt es in beiden Fällen beide Strömungsrichtungen, je nach dem Dichtegradienten. Bei sehr kleiner Dichte ($\lambda \approx 0$) begünstigt Abnahme der Dichte nach außen ($\mu < 0$) das Ausströmen, Zunahme das Einströmen. Anschaulich bedeutet dies: die größere Materiemenge gewinnt das „Tauziehen“ vermittelt der Reibung; ist innen mehr Materie, so wird die jeweils weiter außen liegende Materie beschleunigt und strömt nach außen ab; ist außen mehr Materie, so wird die jeweils weiter innen liegende Materie gebremst und strömt nach innen ab. Bei der Dichte, die zur starren Rotation nötig ist, fällt dieses Argument fort, weil die weiter innen und weiter außen liegende Materie in erster Näherung mit gleichem ω umläuft. χ ist hier in erster Näherung Null. In nächster Näherung tritt nun gerade Ausströmen auf, wenn die Dichte nach außen zunimmt und vice versa. Diese Effekte höherer Ordnung sind anschaulich nicht mehr leicht einzusehen. Wir werden daher nur solche Ergebnisse in qualitativer Diskussion unbedenklich benutzen, die aus beiden Ansätzen in gleicher Weise folgen.

f) Anwendung auf bestimmte Dichteverteilungen. Wenn die Dichte monoton nach außen abnimmt, so befindet man sich im linken unteren Sektor der Abb. 2 bzw. 3 ($\lambda < 1, \mu < 0$). Für das in 2d) behandelte Modell ist

$$\mu = 4\lambda(\lambda - 1). \quad (2,42)$$

Die zugehörige Kurve ist in Abb. 2 eingezeichnet. Man erkennt den Schnittpunkt mit der Kurve $\chi = 0$, der die Gebiete des Einströmens und des Ausströmens voneinander trennt. Auch jede allgemeinere Dichteverteilung, die bei $s = 0$ mit waagerechter Tangente anfängt und monoton und stetig differenzierbar nach außen gegen Null abnimmt, beginnt bei $\lambda = 1, \mu = 0$, verläuft im linken unteren Quadranten und erreicht zuletzt $\lambda = 0, \mu = 0$. In ihrem inneren Teil muß die Materie also jedenfalls nach innen strömen. [Dies gilt übrigens auch im Falle β), falls die Abweichung der Dichte vom Wert im Mittelpunkt stärker als mit der ersten Potenz von s ansteigt. Eine dieser Forderung widersprechende Spitze der Dichteverteilung könnte sich nur einen Augenblick halten.] Ferner kann man zeigen, daß jede Verteilung, die zu endlicher Gesamtmasse gehört, einen Punkt $\dot{\omega} = 0$ und somit ein Gebiet auswärts gerichteter Strömung hat. Eine derartige Dichteverteilung muß nämlich außen rascher als mit $1/s^2$ abfallen. Bei $\lambda = 0$ ist also $-\mu/\lambda > 2$. Die Kurve $\chi = 0$ mündet aber mit $-\mu/\lambda = 2$ in den Nullpunkt ein. Also läuft die der Dichteverteilung zugeordnete Kurve für $s \rightarrow \infty$ sicher im Gebiet $\dot{\omega} < 0$. Wenn hingegen die Gesamtmasse unendlich ist, kann überall $\dot{\omega} > 0$ bleiben. Dann strömt aus dem Unendlichen unbegrenzt Masse ins Innere. Diese Lösung hat wohl keine Beziehung zu wirklichen Vorgängen.

Ein Grenzfall ist die in 2c) besprochene Dichteverteilung, in der $\varrho = \text{const}$ ist innerhalb eines bestimmten Abstandes s_0 und außerhalb davon Null. Berücksichtigt man den Druck, so ist diese Verteilung nicht streng möglich, sie muß vielmehr einen Dichteabfall von endlicher Breite haben. Wir schematisieren sie durch $\varrho = \text{const}$ für $s < s_0$, linearen Abfall von ϱ in einem schmalen Intervall fester Breite δs , und $\varrho = 0$ für $s > s_0 + \delta s$. Der Mischungsweg wird proportional zu δs zu wählen sein, also Fall β) zutreffen. In Abb. 3 ist die zugehörige Beziehung eingetragen: $\lambda = 1, \mu = 0$, für $s < s_0$; $0 < \lambda < 1, \mu$ groß und negativ im Intervall δs ; $\lambda = 0, \mu = 0$ für $s > s_0 + \delta s$. Die Strecke, die den Verlauf δs beschreibt, schneidet jedenfalls die Kurve $\chi = 0$ für $\lambda < 1/3$. Die Materie strömt also einwärts oberhalb einer Dichte, die kleiner als $\varrho_0/3$ ist, auswärts weiter außen. Hierdurch müßte innerhalb dieses Grenzsors der Dichteabfall steiler werden. Der Druck, der in unserer Rechnung nicht berücksichtigt ist, wird die Steilheit des Dichte-

abfalls aufrechterhalten. Also muß immer neue Materie ins Gebiet mit $\varrho < \varrho_0/3$ kommen und nach außen abströmen. Unter dem Einfluß von Druck und Reibung löst sich die Masse schließlich ganz auf. Dieser Vorgang wird in einer späteren Arbeit von W. Heisenberg und dem Verfasser näher untersucht werden.

Schließlich sollen verschiedene Sorten von „Saturnringen“ betrachtet werden, deren λ - μ -Kurven unter der Voraussetzung β) in Abb. 4 eingezeichnet sind.

Fall A. Um eine Zentralmasse, die im Punkt $s = 0$ vereinigt gedacht werden darf, befinde sich

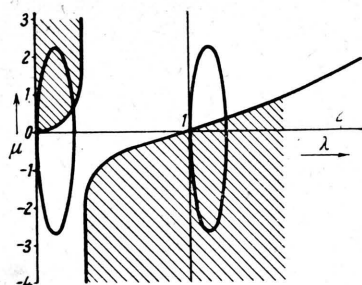


Abb. 4. Vorzeichenfunktion für „Saturnringe“.

in einem schmalen Ring eine Dichteverteilung, deren ϱ durchweg klein gegen das ihm s entsprechende ϱ_0 bleibt. Sie sei etwa durch

$$\varrho = \begin{cases} \varrho_1 [1 + \gamma \cos k(s - s_1)], & s_1 - \frac{\pi}{2k} < s < s_1 + \frac{\pi}{2k} \\ 0 & \text{const} \end{cases} \quad (2, 43)$$

wiedergegeben. Es sei also $\varrho_1 \ll \varrho_0$ und $k \gg 1/s_1$. Dieser Verteilung entspricht in der Abb. 4 eine Ellipse, deren kleine Achse in der Abszissenachse und deren einer Scheitel im Koordinatenanfangspunkt liegt. Da k groß ist, ist $\mu \gg \lambda$, außer für die nächste Umgebung der Abszissenachse, und es folgt aus (2, 40 β) $\chi = \mu$ oder

$$\omega' = \frac{\alpha^2 \omega_0^2 s_1 \varrho'}{\varrho_0}. \quad (2, 44)$$

Setzt man (2, 18) in (2, 17) ein und differenziert nach der Zeit, so folgt, wenn berücksichtigt wird, daß ω rasch mit s variiert,

$$\dot{\varrho} = \frac{2 s_1 \omega_0 \dot{\omega}'}{z} = \frac{2 \alpha^2 s_1^2 \omega_0^3}{z \varrho_0} \varrho''. \quad (2, 45)$$

Dies ist die Wärmeleitungsgleichung. Die Dichte nimmt also überall stetig ab. Man sieht das auch

qualitativ aus der Abb.: Für $\mu > 0$, d. h. nach außen zunehmende Dichte, ist $\chi > 0$, also ein Strom nach innen vorhanden, für $\mu < 0$ ist $\chi < 0$, also ein Strom nach außen.

Fall B. Einer räumlich konstanten Dichteverteilung sei eine Schwankung einer Form wie etwa (2, 43) additiv überlagert. Wir haben jetzt die Ellipse in die Nähe der Geraden $\chi = 1$ zu verschieben. Man sieht aus der Abb., daß sich die Vorzeichen umkehren: Für $\mu > 0$ ist nun $\chi < 0$ und umgekehrt, d. h. der Strom ist dem Dichtegefälle entgegengesetzt. Ein derartiger Ring hat also die Tendenz, sich immer schärfer auszuprägen, allerdings, da χ hier nur quadratisch von Null verschieden ist, zeitlich langsam.

Fall C. Der Ring habe die Form (2, 43), aber ϱ erreiche den Wert ϱ_0 . Die Ellipse schneidet die λ -Achse in $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$. Für (ungefähr) $\lambda < 1/3$ geht der Strom mit dem Dichtegefälle, für $\lambda > 1/3$ ihm entgegen. Der Ring wird also enger und dichter werden. Eine quasistationäre Endphase kann er erreichen, wenn in ihm die Dichte räumlich konstant wird, gemäß (2, 28). Das durch den Druck aufrechterhaltene Dichtegefälle wird ihn dann aber mit der Zeit ebenfalls aufzehren.

Alle Fälle, A, B und C, würden sich unter der Annahme α) qualitativ ebenso verhalten.

3. Dreidimensionale Modelle

a) Grundgleichungen. Eine geschlossene Integration für den Fall ohne Reibung, wie im zweidimensionalen Fall, ist hier nicht mehr allgemein möglich. Wir geben daher zwar den allgemeinen Ansatz, beschränken uns dann aber auf sehr vereinfachende Näherungen.

Wir wählen Zylinderkoordinaten s (Abstand von der Rotationsachse), φ (Winkel um die Achse) und z (Abstand von der invariablen Ebene der Gasmasse). Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} \varrho \left(\dot{v}_s + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_z \frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{s} \right) \\ = -\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \frac{\partial p_s}{\partial s} + T_s, \end{aligned} \quad (3, 1)$$

$$\varrho \left(\dot{v}_\varphi + v_s \frac{\partial v_\varphi}{\partial s} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_s v_\varphi}{s} \right) = T_\varphi, \quad (3, 2)$$

$$\varrho \left(\dot{v}_z + v_s \frac{\partial v_z}{\partial s} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial p_z}{\partial z} + T_z, \quad (3, 3)$$

$$\dot{q} = -\frac{1}{s} \frac{\partial(s q v_s)}{\partial s} - \frac{\partial(q v_z)}{\partial z}, \quad (3, 4)$$

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = z q. \quad (3, 5)$$

In diesen Formeln ist im Druckglied ein Unterschied zwischen p_s und p_z gemacht; es ist also nicht vorausgesetzt, daß der Turbulenzdruck iso-

trop sei. Nach (1, 13) wird nämlich die Schichtung gegen Bewegungen in der z -Richtung stabil sein, weil w mit wachsendem z wenig oder gar nicht, q aber stark abnimmt, während wir unten sehen werden, daß die Schichtung in der s -Richtung im allgemeinen labil ist. Daher werden die Mischungswege in beiden Richtungen sehr verschieden sein, ob auch die Komponenten von w , bedürfte näherer Untersuchung.

Die drei Komponenten von T sind:

$$T_s = 2 \frac{\partial \eta}{\partial s} \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial s} \right) + 2 \eta \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial v_s}{\partial s} - \frac{v_s}{s^2} \right) + \eta \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial s \partial z} \right), \quad (3, 6)$$

$$T_\varphi = \frac{\partial \eta}{\partial s} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial s} - \frac{v_\varphi}{s} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\varphi}{\partial s} - \frac{v_\varphi}{s^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right), \quad (3, 7)$$

$$T_z = \frac{\partial \eta}{\partial s} \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial s} \right) + 2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial s \partial z} + \frac{1}{s} \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial v_s}{\partial s} + 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \quad (3, 8)$$

Die Turbulenzstärke folgt aus

$$v'^2 = 2 \left[\left(\frac{\partial v_s}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{v_s}{s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial s} - \frac{v_\varphi}{s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2. \quad (3, 9)$$

b) Rotierende Scheibe ohne Reibung. Wir setzen v_s, v_z, \dot{q} und \dot{v}_φ gleich Null und vernachlässigen $\partial p_s / \partial s$ und alle drei Reibungskomponenten. Den Druckgradienten in der z -Richtung dürfen wir nicht vernachlässigen, denn wenn man die s -Komponente der Gravitation und die Zentrifugalkraft gegeneinander kompensiert, bleibt für einen nicht in der Ebene $z = 0$ liegenden Punkt eine z -Komponente der Gravitation übrig, die nur durch den z -Druckgradienten kompensiert werden kann. (3, 2) und (3, 4) sind dann automatisch erfüllt, und es bleiben die Gleichungen

$$\frac{v_\varphi^2}{s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad (3, 10)$$

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{q} \frac{\partial p_z}{\partial z}, \quad (3, 11)$$

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = z q. \quad (3, 12)$$

Diese Gleichungen müssen durch eine Zustandsgleichung zwischen p_z und q ergänzt werden. Wir setzen

$$p_z = \gamma q. \quad (3, 13)$$

Über γ wird nur vorausgesetzt, daß es nicht von q und z abhängt. Nimmt man an, es sei $p_z = p_s$ und v_φ hänge nicht von z ab [zu letzterer Annahme vgl. 3 c)], so folgt aus (1, 9), (1, 21), (2, 8) und (3, 9)

$$\gamma = \frac{\partial^2}{\partial s^2} l^2 v'^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \alpha^2 s^4 \omega'^2. \quad (3, 14)$$

Wir setzen nun an

$$\Phi(s, z) = \Psi(s) + \chi(s, z) \quad (3, 15)$$

mit der Nebenbedingung

$$\chi(s, 0) = 0. \quad (3, 16)$$

(3, 11) erhält dann die Form

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = -\gamma \frac{\partial \ln q}{\partial z} \quad (3, 17)$$

und wird gelöst durch die barometrische Höhenformel

$$q(s, z) = q_a(s) e^{-\frac{\chi}{\gamma}}. \quad (3, 18)$$

q_a ist der Wert der Dichte in der Äquatorebene. Wir führen nun ausdrücklich die Vereinfachung

ein, die den bisherigen Annahmen angemessen ist, daß die Dichteverteilung eine flache Scheibe sei und daher ϱ und Φ mit z sehr viel rascher als mit s variieren. Wir können dann in (3,12) in erster Näherung die Ableitungen nach s vernachlässigen. Entwickeln wir χ und ϱ nach z , so muß wegen (3,16) und der Symmetrie um die z -Ebene die Reihe für χ mit dem quadratischen Glied beginnen:

$$\chi = az^2 + \dots \quad (3,19)$$

Setzen wir diese Entwicklungen in (3,12) ein, so ergibt sich für das erste Glied

$$2a = z \varrho_a. \quad (3,20)$$

Für die weitere Rechnung ist eine bequemere Größe als ϱ bzw. ϱ_a die Flächendichte

$$\sigma(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(s, z) dz \approx \varrho_a \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi a}} = \sqrt{\frac{2\gamma \varrho_a}{\pi z}}. \quad (3,21)$$

Ein Maß für die Dicke der Scheibe ist

$$d = \sqrt{\frac{\gamma}{a}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{z \varrho_a}}. \quad (3,22)$$

Der Faktor γ ist proportional zur Turbulenzenergie (oder bei molekularem Druck zur Temperatur). Die Dicke der Scheibe ist also proportional zur Turbulenzgeschwindigkeit und umgekehrt proportional zur Wurzel aus der äquatorialen Dichte.

Durch die bisherigen Schritte der Rechnung ist zwar z eliminiert und das Problem auf zwei Dimensionen reduziert. Aber im Gegensatz zum tatsächlich zweidimensionalen Modell des 2. Abschn. steht zu seiner Lösung die Poissonsche Gleichung nicht mehr zur Verfügung. Denn sie wurde in der Form (3,20) schon verwendet, und die Fortsetzung des dort begonnenen Näherungsverfahrens führt auf keine einfachen Ausdrücke. Die Rechnung muß nun so weitergeführt werden, daß zu einer gegebenen Verteilung der Flächendichte das zugehörige Potential nach

$$\Phi(s, \varphi) = -G \iint \frac{\sigma(s', \varphi')}{r(s, \varphi; s', \varphi')} s' ds' d\varphi' \quad (3,23)$$

berechnet wird, wobei $r(s, \varphi; s', \varphi')$ der Abstand der durch s, φ und s', φ' bezeichneten Punkte ist. Dieses Φ ist in (3,10) einzusetzen und gibt die zu σ gehörige Verteilung der Winkelgeschwindigkeit. Daß es zu (3,23) keine gleichwertige Differential-

beziehung nach der Art der Poissonschen gibt, liegt daran, daß $1/r$ die Lösung der Laplaceschen Gleichung für drei, aber nicht für zwei Dimensionen ist. Das Fehlen eines derartigen Differentialzusammenhangs äußert sich physikalisch z. B. in folgenden Effekten: Für das echte zweidimensionale Potential $\log r$, das in Abschn. 2 behandelt wurde, gelten die bekannten potentialtheoretischen Sätze, daß eine nur von s abhängige Dichteverteilung innerhalb eines festen Kreises um den Nullpunkt auf einen äußeren Punkt wirkt, als wäre sie im Mittelpunkt vereinigt, und daß eine solche Verteilung in einem konzentrischen Kreisring um den Nullpunkt auf einen inneren Punkt keine Kraft ausübt. Daher kommt beim Fortschreiten von ds nach außen zur Kraftwirkung auf den betrachteten Punkt nur diejenige der im Kreisring der Dicke ds liegenden Masse hinzu. Im jetzigen Fall hingegen zieht z. B. ein homogener Kreisring einen in seinem Innern liegenden Punkt nach außen, denn $1/r$ fällt rascher mit der Entfernung ab als $\log r$, also wirken die näher beim Aufpunkt gelegenen Teile des Rings stärker als die fernerliegenden. Die Änderung der Kraft bei einer kleinen Verschiebung des Aufpunkts hängt also in der Tat von der Dichteverteilung in der ganzen Ebene ab.

Die Lösung von (3,23) für eine homogen belegte Kreisscheibe ist ein elliptisches Integral. Eine für praktische Zwecke hinreichende Rechenvorschrift für nicht homogene Dichteverteilungen haben Wyse und Mayall⁷ angegeben. Im Abschn. 4 werden wir ihre Resultate benützen.

c) Stationärer Materiestrom bei großer Zentralmasse. Die Reibung wollen wir hier nur in einem Spezialfall einführen. Wir umgehen die Schwierigkeiten der Lösung von (3,23), indem wir die Vorgänge im Feld einer sehr großen Zentralmasse betrachten, also

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad (3,24)$$

vorgeben ($r^2 = s^2 + z^2$). Beschränken wir uns wieder auf eine Scheibe, so folgt das dritte Keplersche Gesetz

$$r_\varphi = \frac{\varepsilon}{s^{1/2}} \quad (3,25)$$

mit

$$\varepsilon = \sqrt{GM}. \quad (3,26)$$

⁷ A. B. Wyse u. N. V. Mayall, *Astrophysic. J.* **95**, 24 [1943].

Das Modell würde also die äußersten Teile eines Spiralnebels oder eine Gasmasse um einen Stern, wie sie z. B. in ¹[P] vorausgesetzt ist, darstellen. Nach den bisherigen Überlegungen sollte in einem derartigen Gaskörper vorzugsweise derjenige Transport von Masse nach außen stattfinden, der durch die Auflösung der im Inneren rotierenden Masse bedingt ist. Wir setzen also einen von s unabhängigen Strom der Materie nach außen an:

$$J = \sigma s v_s = \text{const}, \quad (3, 27)$$

und fragen, welche Dichteverteilung nötig ist, um auf Grund der Reibungsgesetze gerade diesen Strom zu erzeugen.

Wir vernachlässigen wieder \dot{v}_s und quadratische Glieder in v_s , v_z , \dot{v}_φ und $\dot{\varphi}$ (Forderung der Stationarität) sowie T_s und T_φ . Dann ist (3,1) durch (3,25) befriedigt, und es bleibt nur (3,2) zu erfüllen. Der Ansatz (3,25) besagt, daß v_φ nicht von z abhängt (dies läßt sich aus (3,1) in hinreichender Näherung direkt ableiten), und so nimmt (3,9) wieder die Form (2,10) an und (3,1) die Form (2,14). Aus (3,2) wird also

$$\sigma v_s \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial s} + \frac{v_\varphi}{s} \right) = \frac{\sigma v_s}{s} (s v_\varphi)' = - \frac{\beta}{s^2} [s^6 \omega'^2 \varrho]' \quad (3, 28)$$

Für σv_s wird aus (3,27) eingesetzt, rechts und links mit s^2 multipliziert und nach s integriert. Wird aus (3,25) eingesetzt, so folgt

$$J \varepsilon s^{1/2} = \text{const} - \frac{9}{4} \beta \varepsilon^2 s \sigma, \quad (3, 29)$$

oder

$$\sigma = \frac{\sigma_0 s_0}{s} \left[1 - \left(\frac{s}{s_1} \right)^{1/2} \right]. \quad (3, 30)$$

Hier ist $\sigma_0 s_0$ die Integrationskonstante und

$$s_1 = \frac{81}{16} \left(\frac{\sigma_0 s_0 \varepsilon \beta}{J} \right)^2. \quad (3, 31)$$

Das Vorzeichen der Wurzel in (3,30) ist gleich dem Vorzeichen von J zu setzen; ist J positiv (Ausströmen), so gilt das in (3,30) gegebene negative Vorzeichen in der Klammer, ist J negativ (Einstömen), so tritt ein positives Zeichen an seine Stelle.

Anschaulich heißt dies: Die Flächendichte fällt in erster Näherung wie $1/s$ nach außen ab. Streng ist dies richtig, wenn $J = 0$ ist, $\sigma \sim 1/s$ ist also die Lösung ohne Strom. Findet ein Strom nach außen statt, so wird σ im Endlichen Null. An diesem Ort s_1 würde v_s unendlich, d. h. die Lösung versagt dort. Physikalisch kann also in dieser Entfernung der gleichförmige Strom nach außen nicht aufrechterhalten werden; die Materiedichte muß dort mit der Zeit anwachsen. Umgekehrt fällt σ im Unendlichen nur wie $1/s^{1/2}$ ab, wenn ein Strom nach innen vorhanden ist. Diese Lösung, ebenso wie die stromlose, gehört zu unendlicher Gesamtmasse, analog den Ergebnissen von 2f). Diese Lösung könnte aber z. B. in der Umgebung eines in eine interstellare Wolke eingebetteten Sterns sinnvoll sein.

4. Vergleiche mit den Erfahrungen über die Rotation von Spiralnebeln

Wir haben direkte Kenntnisse über das Rotationsgesetz dreier Spiralnebel: der Milchstraße, des Andromeda-Nebels⁸ und von M 33⁹. Zusätz-

liche indirekte Schlüsse lassen sich wohl aus der Gestalt der Balkenspiralen ziehen¹⁰. Alle Daten lassen sich in erster Näherung zu dem auch theoretisch zu erwartenden Bild zusammenfassen: der Nebel rotiert innen starr, nach außen nimmt die Winkelgeschwindigkeit ab und folgt schließlich dem dritten Keplerschen Gesetz. Die Erfahrungen am Andromeda-Nebel und M 33 zeigen, daß die sichtbaren Spiralarme in einem Ge-

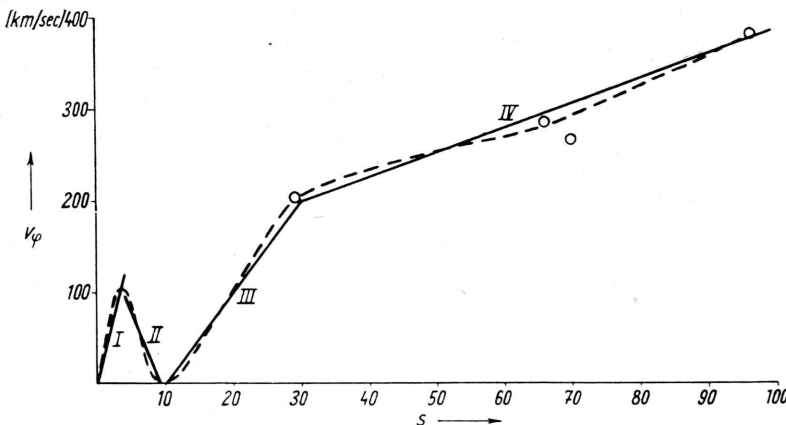


Abb. 5. Rotationsgeschwindigkeit als Funktion des Abstands vom Mittelpunkt im Andromeda-Nebel nach Babcock. (Abszisseneinheit Bogenminuten.)

⁸ H. W. Babcock, Lick Obs. Bull. 19, 41 [1939].

⁹ N. V. Mayall u. L. H. Aller, Astrophysic. J. 95, 5 [1942].

¹⁰ C. F. v. Weizsäcker u. W. Heisenberg, Z. Physik, im Erscheinen.

biet sind, in dem die Rotation noch nicht beträchtlich von der starren abweicht.

Einen detaillierten Vergleich mit der Theorie läßt nur das Rotationsgesetz des Andromeda-

Nebels zu. Abb. 5 zeigt v_φ als Funktion von s nach Babcock. Die empirischen Punkte sind für die nachfolgende Rechnung durch vier gerade Linien interpoliert, deren analytische Darstellung die folgenden Gleichungen angeben:

$$\begin{aligned} \text{Gebiet I} : 0 < s < 4' &, \quad v_\varphi = \omega_0 s, & \omega_0 = 30; \\ \text{Gebiet II} : 4' < s < 9' &, \quad v_\varphi = A - Bs, & A = 180, B = 20; \\ \text{Gebiet III} : 9' < s < 30' &, \quad v_\varphi = Cs - D, & C = 10, D = 100; \\ \text{Gebiet IV} : 30' < s < 100' &, \quad v_\varphi = Es + F, & E = 2,67, F = 120. \end{aligned} \quad (4,1)$$

v_φ ist in km/sec und s in Bogenminuten gemessen. Im absoluten Maß ist für den Andromeda-Nebel $1' \approx 60 \text{ pc} \approx 2 \cdot 10^{20} \text{ cm}$. Im Gebiet I ist die Rotation starr. In II fällt sie bis auf Null ab. Während im übrigen die Geschwindigkeitsverteilung in dem Nebel innerhalb der Meßgenauigkeit symmetrisch zum Mittelpunkt ist, zeigen mehrere Messungen von Babcock im Grenzgebiet zwischen II und III auf der einen Seite des Nebels negative v_φ der Größenordnung 50 km/sec, an deren Realität Babcock selbst allerdings zweifelt. Die Möglichkeit dieses Zweifels zeigt übrigens die Größenord-

nung, innerhalb deren die empirischen Daten noch unsicher sind. Im Gebiet III nimmt nicht nur v_φ , sondern auch die Winkelgeschwindigkeit selbst nach außen zu („überstarre“ Rotation); das Vorzeichen von v_φ ist dasselbe wie in I und II. In IV nimmt ω nach außen langsam ab.

Wyse und Mayall¹⁷ haben die Dichteverteilung berechnet, die zu dieser Geschwindigkeitsverteilung gehört. Sie ist in Abb. 6 angegeben und für die 4 Gebiete wiederum durch 4 Geraden approximiert. Ihre Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} \text{Gebiet I} : 0 < s < 4' &, \quad \sigma = a - bs, & a = 60, b = 12,5; \\ \text{Gebiet II} : 4' < s < 9' &, \quad \sigma = c + ds, & c = 6, d = 1; \\ \text{Gebiet III} : 9' < s < 30' &, \quad \sigma = e, & e = 16; \\ \text{Gebiet IV} : 30' < s < 100' &, \quad \sigma = f - gs, & f = 20, g = 1/6. \end{aligned} \quad (4,2)$$

Die Flächendichte ist in 100 Sonnenmassen pro Quadrat-parsec oder $2 \cdot 10^{-2} \text{ g/cm}^2$ gemessen. In I ist der dichte Kern, an der Grenze von I und II ein Dichteminimum. Das Dichtemaximum in III bildet einen Kreisring, der, wie in Abschn. 3, erwähnt ist, die innerhalb seiner liegende Materie nach außen zieht. Er ist so gewählt, daß seine Anziehung für den Abstand $s=9'$ die Anziehung des Kerns gerade kompensiert und überall sonst kleiner ist als letztere. Dadurch wird für $s=9'$ ein Gleichgewicht mit $v_\varphi = 0$ möglich. Der Dichteabfall nach außen in IV ist sehr schwach. Wyse und Mayall haben willkürlich die Dichteverteilung so angesetzt, daß für $s=100'$ gerade $\sigma=0$ wird. Da in Wirklichkeit weiter außen noch Materie vorhanden ist, bleibt (4,2) für s nahe 100' absichtlich etwas oberhalb ihrer

Werte. Im photographischen Bild des Nebels bilden I und Teile von II den Kern, die Grenze von II und III zeigt Lücken der Sternverteilung, III und IV sind das Gebiet der Spiralarme, wobei sich

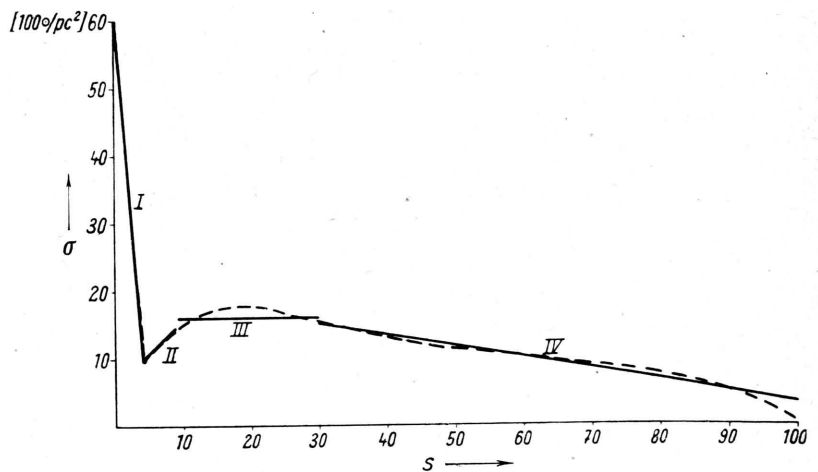


Abb. 6. Flächendichte der Masse als Funktion des Abstands vom Mittelpunkt im Andromeda-Nebel nach Wyse und Mayall. (Abszisseneinheit Bogenminuten.)

III als hellere innere Windung von IV, als der schwächeren äußeren, deutlich abhebt. Der Helligkeitsabfall nach außen ist steiler als der Dichteabfall.

Wyse und Mayall haben nur das Gleichgewicht von Gravitation und Zentrifugalkraft betrachtet. Sie haben damit die Möglichkeit des beobachteten Rotationsgesetzes bei geeigneter Materieverteilung, aber nichts über seine Entstehung erkannt. Letztere nun kann vielleicht aus Reibung und Druck verstanden werden. Wir berechnen für die 4 Gebiete:

$$T_{\varphi} = - \frac{f\beta}{s^2} [s^6 \omega'^2 \sigma]'. \quad (4,3)$$

Da wir hier σ statt ϱ gesetzt haben, ist T_{φ} eine Kraft pro Flächeneinheit. Ferner berechnen wir, um eine anschauliche Abschätzung der Größenordnung der Wirkung von T_{φ} zu haben, analog zu (2,22)

$$v_s = \frac{T_{\varphi}}{\sigma \omega}. \quad (4,4)$$

Diese Formel ist aber aus zwei Gründen nur eine Schätzung: 1. wegen der Vernachlässigung des Druckes, 2. weil (2,22) nur im zweidimensionalen Fall streng gilt. In allen 4 Gebieten haben σ und v_{φ} die Form

$$\sigma = k + l s, \quad v_{\varphi} = K + L s. \quad (4,5)$$

Es folgt:

$$T_{\varphi} = - \frac{f\beta K^2}{s} (2k + 3ls), \quad (4,6)$$

$$v_s = - f\beta K^2 \frac{2k + 3ls}{(k + ls)(K + Ls)}. \quad (4,7)$$

Für die einzelnen Gebiete ist

$$\text{I.: } T_{\varphi} = 0;$$

$$\text{II.: } T_{\varphi} = - \frac{\beta A^2}{s} (2c + 3ds) < 0;$$

$$\text{III.: } T_{\varphi} = \frac{2\beta D^2 e}{s} > 0; \quad (4,8)$$

$$\text{IV.: } T_{\varphi} = - \frac{\beta F^2}{s} (2f - 3gs) \begin{cases} < 0, \text{ für } s < 80'; \\ > 0, \text{ für } s > 80'. \end{cases}$$

$T_{\varphi} < 0$ bedeutet Bremsung durch Reibung, also nach innen sinkende Materie, $T_{\varphi} > 0$ Beschleunigung, also Strom nach außen. In I ist starre Rotation und daher keine Reibung, in II strömt die

Materie nach innen, in III nach außen, in IV im inneren Teil nach innen, im äußeren nach außen. Diese Strömungen sollten also die Dichte im Kern und im äußeren Teil des Rings (Grenze zwischen III und IV) steigern, im Gebiet zwischen Kern und Ring (Grenze zwischen II und III) senken, und schließlich die äußersten Teile des Nebels nach außen abfließen lassen. Dies entspricht genau der in 3f), Fall B und C, erörterten Tendenz eines Rings hinreichender Dichte, sich immer schärfer auszuprägen. Dieser Tendenz wirkt entgegen der Druck, der teils der Turbulenz des Gases, teils der Eigenbewegung der Sterne entstammt. Ferner ist zu bedenken, daß unsere Berechnung weit innen, wo der Hauptteil der Masse nicht aus Gas, sondern aus Sternen besteht, die Reibung zu groß ergibt. Der Druckgradient ist, roh gesprochen, T_{φ} überall entgegengesetzt gerichtet, außer für $s > 80'$. Es ist also denkbar, daß unter dem Gegeneinanderwirken von Druck und Reibung die heutige Konfiguration des Nebels überall, außer in den äußersten Gebieten, einem momentanen Gleichgewicht entspricht.

Um v_s in km/sec angeben zu können, müssen wir β abschätzen. Nach (1,12), (1,21), (2,8) und (2,13) ist

$$\beta = \alpha^2 \delta. \quad (4,9)$$

Es sei willkürlich, aber mit den Prandtl'schen Vorstellungen vereinbar, $\delta = 1$ gesetzt. α kann dann aus der Lebensdauer der Spiralarme abgeschätzt werden. Letztere werden durch die Turbulenz aufgelöst. Ihre Lebensdauer (wenn von der Stabilisierung durch die Gravitation abgesehen wird) ist dann an einem Punkt, der um s vom Mittelpunkt entfernt ist, etwa

$$\tau = \frac{s}{w} = \frac{s}{l v'} = \frac{1}{\alpha v'}. \quad (4,10)$$

Der Winkel gegen die ursprüngliche Richtung, um die sich ein Spiralarm am Ort s in der Zeit t dreht, ist

$$\varphi(s, t) = \omega(s) t. \quad (4,11)$$

Ist der Spiralarm zwischen die s -Werte s_1 und s_0 eingeschlossen und

$$s_1 - s_0 = S, \quad (4,12)$$

so ist die Zahl der Windungen, in denen er sich, wenn er anfangs geradlinig war, nach der Zeit τ um den Kern herumgelegt hat,

$$n = \frac{\varphi(s_1, \tau) - \varphi(s_0, \tau)}{2\pi} = \frac{\omega(s_1) - \omega(s_0)}{2\pi a v'} \quad (4, 13)$$

$$\approx \frac{\omega' S \cdot}{2\pi a v'} \approx \frac{1}{2\pi a}.$$

Natürlich ist diese Abschätzung sehr roh. Empirisch liegt n meist zwischen $1/2$ und 1 . Für den Andromeda-Nebel mag $n=1$ richtig sein, also $\beta \approx 1/40$. Es ergibt sich für v_s nun folgende Tabelle:

s	$6'$	$20'$	$50'$	$100'$
v_s	-35	$+5$	-2	$+3$ km/sec.

(4, 14)

Die Werte für die drei inneren Punkte geben vielleicht in Wahrheit nur an, wie groß die Geschwindigkeit sein müßte, welche der Druckgradient in der umgekehrten Richtung erzeugen würde, wenn er nicht gegen die Wirkung der Reibung gerade kompensiert würde. Der Wert für $100'$ hingegen ist die wahre Geschwindigkeit des Abströmens. Eine Strecke von $100'$ oder $2 \cdot 10^{22}$ cm wird mit dieser Geschwindigkeit in $6 \cdot 10^{16}$ sec oder

$2 \cdot 10^9$ a zurückgelegt. Also ist das Alter, das der Nebel bei diesem Tempo der Auflösung erreichen kann, vergleichbar dem Alter der Welt, wie schon in 1 [K] nach einer ungenauer begründeten Formel geschlossen wurde.

Zum Abschluß sei eine Frage an die Erfahrung aufgeworfen: In 1 [K] wurde die Überlegung von W. Heisenberg und dem Verfasser dargestellt, nach der die Spiralstruktur die Folge einer Verzerrung von stets neu gebildeten Wolken durch die differentielle Rotation des Spiralnebels ist. Wenn diese Überlegung richtig ist, so müßte aus dem Babcock'schen Rotationsgesetz des Andromeda-Nebels folgen, daß auf der Innenseite des Rings, wo die wirkliche Geschwindigkeit nach außen zunimmt, die Spiralstruktur den umgekehrten Drehsinn zeigt wie außen. Es ist mir auf den mir zugänglichen Bildern des Nebels nicht gelungen, die Struktur in dieser inneren Region so deutlich zu sehen, daß diese Frage mit Ja oder Nein hätte beantwortet werden können. Es wäre lohnend, sie mit den besten verfügbaren Hilfsmitteln nachzuprüfen.

Zur Deutung der Interferenzen langsamer Elektronen

Von ERWIN FUES

Aus dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Techn. Hochschule Stuttgart
(Z. Naturforschg. 3 a, 539–543 [1948]; eingegangen am 14. August 1948)

Für die von Davisson und Germer¹ mitgeteilten Anomalien der Bragg'schen Reflexion langsamer Elektronen am Nickel-Einkristall war nach einer unvollständigen Theorie von Morse² anzunehmen, daß sie als dynamische Beugungswirkung mehrerer verkoppelter Strahlen zu deuten seien. Da die zugrunde liegenden Vielstrahlprobleme eine vollständige Durchrechnung auf Grund der dynamischen Beugungstheorie nicht erlauben, so wird wenigstens gezeigt, daß die Reflexe gut in demjenigen Bereich liegen, in welchem sie nach einer genäherten Abschätzung zu erwarten sind. Am (444)-Reflex wird berechnet, daß die dynamische Kopplung mit (335) den theoretisch zu erwartenden Charakter hat.

In den ersten Jahren nach Davissons und Germers Entdeckung der Elektroneninterferenzen wurden ziemlich viele Beugungsversuche mit langsamen Elektronen (im Bereich einiger hundert e-Volt) angestellt. Insbesondere haben Davisson und Germer¹ selbst Elektronen mit einer Energie E zwischen 60 und 600 e-Volt in Bragg'scher Anordnung parallel zur (110)-Ebene an der (111)-Oberfläche eines Nickel-Einkristalls

in verschiedenen Ordnungen n reflektieren lassen und dabei die Bragg'sche Beziehung

$$n \lambda_i = 2 d \cos \theta_i \quad (1)$$

geprüft. Dabei konnte versuchsweise die Brechung beim Ein- und Austritt in den Kristall durch

$$\lambda_a = \mu \lambda_i, \quad \sin \theta_a = \mu \sin \theta_i$$

(θ_a, θ_i die Winkel gegen das Lot auf der Grenzfläche),

$$\mu = \sqrt{1 - \bar{U}/E} > 1$$

¹ C. J. Davisson u. L. H. Germer, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 14, 624 [1928].

² P. M. Morse, Physic. Rev. 35, 1310 [1930].